General and Professional Education
1/2018 pp. 3-6
ISSN 2084-1469
DOI: 10.26325/genpr.2018.1.1

РЕШЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ИМ ЗАДАЧ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

THE SOLUTION OF TWO DIRECT AND REVERSIBLE TASKS IN THE THEORY OF ELASTICITY

Valery A. Akimov
Svetlana V. Goncharova
Białoruski Narodowy Uniwersytet Techniczny
al. Niezależności 65
220127 Mińsk, Białoruś
Andrzej Jakubowski
Akademia Morska w Szczecinie
Zakład Mechaniki Technicznej
ul. Wały Chrobrego 1-2
70-500 Szczecin, Polska
e-mail: a.jakubowski@am.szczecin.pl

Abstract: Two solutions of the direct and inverse problems of elasticity theory are built, which promote a more detailed analysis of the surround-stress state at the point of deformable solid. These calculations have original character.

Keywords: elasticity theory, surround-stress state at a point, two problems.

Введение

Анализ объемного напряженно-деформированного состояния в точке упругого изотропного тела является одной из ключевых тем в курсе сопротивления материалов и теории упругости. В свою очередь при изучении этой темы большое значение имеют задачи нахождения по заданному тензору напряжений главных площадок и действующих в них главных напряжений, а также нахождение напряжений на наклонной площадке. Авторы этой работы назвали эти задачи прямыми и поставили своей целью решить обратные им задачи, т.е. конечный результат решенных задач взять за исходные данные и восстановить по ним заданный тензор напряжений.
Решения обратных задач замыкают поставленную проблему и придают ей дополнительную стройность и завершенность, что принесет несомненную пользу всем специалистам, работающим в данном направлении.

Первая прямая задача

Рассмотрим первую прямую задачу теории упругости для напряженного состояния упругой изотропной среды. Ее условие заключается в том, что по заданному напряженному состоянию следует найти главные напряжения и положение главных площадок. Решение этой задачи известно, поэтому приведем ее решение на конкретном примере.
Пусть напряженное состояние в точке задано тензором напряжений:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ МПа.} \qquad (1)$$

Главные напряжения являются корнями кубического уравнения $\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$. Коэффициентами этого уравнения служат инварианты тензора напряжений:
а) линейный инвариант
$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 2 + 4 + 4 = 10$ МПа;
б) квадратичный инвариант
$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 =$ (МПа)^2;
$= 2\cdot 4 + 4\cdot 4 + 4\cdot 2 - (-\sqrt{3})^2 - 0^2 - 0^2 = 29$
в) кубический инвариант
$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 =$
$= 2\cdot 4\cdot 4 + 2\cdot(-\sqrt{3})\cdot 0 - 2\cdot 0^2 - 4\cdot 0^2 - 4\cdot(-\sqrt{3})^2 = 20$
(МПа)^3.
Так как все три инварианта отличны от нуля, значит это объемное напряженное состояние. При таких значениях инвариантов кубическое уравнение принимает вид:

$$\sigma^3 - 10\sigma^2 + 29\sigma - 20 = 0. \qquad (2)$$

Корни этого уравнения равны: $\sigma_1 = 5$ МПа; $\sigma_2 = 4$ МПа; $\sigma_3 = 1$ МПа. Они и есть главные напряжения, рассматриваемые в порядке убывания, то есть $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Направляющие косинусы главных площадок определяются из уравнений:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_i)l_i + \tau_{xy}m_i + \tau_{xz}n_i = 0; \\ \tau_{yx}l_i + (\sigma_y - \sigma_i)m_i + \tau_{yz}n_i = 0; \\ \tau_{xz}l_i + \tau_{zy}m_i + (\sigma_z - \sigma_i)n_i = 0; \\ l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1; \quad i = 1,\ 2,\ 3. \end{cases} \qquad (3)$$

Для первой площадки $i = 1$, $\sigma_1 = 5$ МПа, тогда получим:

$$\begin{cases} -3l_1 - \sqrt{3}m_1 = 0; \\ -\sqrt{3}l_1 - m_1 = 0; \\ -n_1 = 0; \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Решение этой системы: $l_1 = 1/2$; $m_1 = -\sqrt{3}/2$; $n_1 = 0$.

То есть вектор нормали равен: $\vec{n}_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.

Для второй площадки $i = 2$, $\sigma_2 = 4$ МПа, тогда:

$$\begin{cases} -2l_2 - \sqrt{3}m_2 = 0; \\ -\sqrt{3}l_2 = 0; \\ 0 = 0; \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Решение этой системы имеет вид: $l_2 = 0$; $m_2 = 0$; $n_2 = 1$. То есть вектор нормали равен: $\vec{n}_2 = (0,0,1)$.

Для третьей площадки $i = 3$, $\sigma_3 = 1$ МПа, тогда имеем:

$$\begin{cases} -3l_3 - \sqrt{3}m_3 = 0; \\ -\sqrt{3}l_3 + 3m_3 = 0; \\ 3n_3 = 0; \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Решение: $l_3 = \sqrt{3}/2$; $m_3 = 1/2$; $n_3 = 0$. То есть вектор нормали равен: $\vec{n}_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

Нетрудно непосредственно убедиться в том, что выполняются соотношения для ортогональности площадок:

$$\begin{cases} l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0; \\ l_2l_3 + m_2m_3 + n_2n_3 = 0; \\ l_3l_1 + m_3m_1 + n_3n_1 = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Первая обратная задача

В данной точке твердого тела главные напряжения и главные направления равны:

$$\sigma_1 = 5 \text{ МПа}; \ \sigma_2 = 4 \text{ МПа}; \ \sigma_3 = 1 \text{ МПа};$$

$$\vec{n}_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right); \ \vec{n}_2 = (0,0,1); \ \vec{n}_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Требуется найти исходный тензор напряжений $T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$ в данной точке.

Решение этой задачи базируется на соотношениях, получаемых из векового уравнения:

$$\begin{cases} \sigma_x l_1 + \tau_{xy}m_1 + \tau_{xz}n_1 = \sigma_1 l_1; \\ \tau_{yx}l_1 + \sigma_y m_1 + \tau_{yz}n_1 = \sigma_1 m_1; \\ \tau_{zx}l_1 + \tau_{zy}m_1 + \sigma_z n_1 = \sigma_1 n_1; \\ \sigma_x l_2 + \tau_{xy}m_2 + \tau_{xz}n_2 = \sigma_2 l_2; \\ \tau_{yx}l_2 + \sigma_y m_2 + \tau_{yz}n_2 = \sigma_2 m_2; \\ \tau_{zx}l_2 + \tau_{zy}m_2 + \sigma_z n_2 = \sigma_2 n_2; \\ \sigma_x l_3 + \tau_{xy}m_3 + \tau_{xz}n_3 = \sigma_3 l_3; \\ \tau_{yx}l_3 + \sigma_y m_3 + \tau_{yz}n_3 = \sigma_3 m_3; \\ \tau_{zx}l_3 + \tau_{zy}m_3 + \sigma_z n_3 = \sigma_3 n_3. \end{cases} \qquad (8)$$

Вводя обозначения $\sigma_x = x_1$, $\tau_{xy} = x_2$, $\tau_{xz} = x_3$, $\sigma_y = x_4$, $\tau_{yz} = x_5$, $\sigma_z = x_6$, перепишем данную систему в более привычном виде:

$$\begin{cases} x_1l_1 + x_2m_1 + x_3n_1 = \sigma_1 l_1; \\ x_2l_1 + x_4m_1 + x_5n_1 = \sigma_1 m_1; \\ x_3l_1 + x_5m_1 + x_6n_1 = \sigma_1 n_1; \\ x_1l_2 + x_2m_2 + x_3n_2 = \sigma_2 l_2; \\ x_2l_2 + x_4m_2 + x_5n_2 = \sigma_2 m_2; \\ x_3l_2 + x_5m_2 + x_6n_2 = \sigma_2 n_2; \\ x_1l_3 + x_2m_3 + x_3n_3 = \sigma_3 l_3; \\ x_2l_3 + x_4m_3 + x_5n_3 = \sigma_3 m_3; \\ x_3l_3 + x_5m_3 + x_6n_3 = \sigma_3 n_3. \end{cases} \qquad (9)$$

Полученные девять уравнений содержат шесть неизвестных, поскольку только два уравнения из каждых трех являются неизвестными. Поэтому, например, третье, шестое и девятое уравнения, можно удалить. Но мы их оставим для проверки правильности решения, так как они должны тождественно обратиться в ноль. Подставляя численные значения, перепишем систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 = \frac{5}{2}; \\ \frac{1}{2}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_4 = -\frac{5\sqrt{3}}{2}; \\ x_3 = 0; \\ x_5 = 0; \\ x_6 = 4; \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 = -\frac{1}{2}; \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_2 = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Данная система уравнений имеет решение: $x_1 = 2$; $x_2 = -\sqrt{3}$; $x_3 = 0$; $x_4 = 4$; $x_5 = 0$; $x_6 = 4$. То есть исходный тензор имеет вид:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ МПа}. \quad (11)$$

Таким образом, круг замкнулся – ответом обратной задачи явилось исходное условие прямой задачи.

Вторая прямая и обратная задачи

Эта задача заключается в нахождении компонент вектора полного напряжения, действующего в наклонной площадке с нормалью $\vec{n} = (l, m, n)$, по тензору напряжений (1). Приводим известное решение этой задачи [1]:

$$\begin{cases} \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = p_{nx}; \\ \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = p_{ny}; \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n = p_{nz}. \end{cases} \quad (12)$$

Обратная ей задача, очевидно, звучит так: по известным компонентам полного напряжения (p_{nx}, p_{ny}, p_{nz}), действующего на наклонной площадке с нормалью $\vec{n} = (l, m, n)$, найти компоненты тензора деформаций (1).

Решение такой задачи приводится впервые. Оно основано на составлении шести уравнений равновесия тетраэдра. Первые три из них содержатся в формуле (12). Оставшиеся три уравнения моментов относительно координатных осей составим по аналогии с [1]:

$$-\sigma_x \frac{dz}{3} S_{\Delta OBC} - \tau_{xy} \frac{dz}{3} S_{\Delta OAB} + p_{nx} \frac{dz}{3} S_{\Delta ABC} + \sigma_z \frac{dx}{3} S_{\Delta OAC} = 0. \quad (13)$$

С учетом того, что:

$$S_{\Delta OBC} = S_{\Delta ABC} l; \; S_{\Delta OAB} = S_{\Delta ABC} m; \; S_{\Delta OAC} = S_{\Delta ABC} n, \quad (14)$$

перепишем уравнение (13) в виде:

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m - \sigma_z \frac{dx}{dz} = p_{nx}. \quad (15)$$

Производя циклическую замену переменных, получим еще два таких уравнения. Выпишем эту систему уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_x l + \tau_{xy} m - \sigma_z n \dfrac{dx}{dz} = p_{nx}; \\ \sigma_y m + \tau_{yz} n - \sigma_x l \dfrac{dy}{dx} = p_{ny}; \\ \sigma_z n + \tau_{zx} l - \sigma_y m \dfrac{dz}{dy} = p_{nz}. \end{cases} \quad (16)$$

Выражая площади треугольников, входящих в формулы (14), через $OA = dx$, $OC = dy$, $OB = dz$, получим систему уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} 1 + \left(\dfrac{dz}{dz}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dy}\right)^2 = \dfrac{1}{l^2}; \\ 1 + \left(\dfrac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2 = \dfrac{1}{m^2}; \\ 1 + \left(\dfrac{dy}{dz}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = \dfrac{1}{n^2}. \end{cases} \quad (17)$$

Решением этой системы являются искомые равенства:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{l}{m}; \; \frac{dy}{dx} = \frac{m}{n}; \; \frac{dz}{dy} = \frac{n}{l} \quad (18)$$

Нетрудно убедиться в том, что они тождественно удовлетворяют соотношениям (17) в силу равенства $l^2+m^2+n^2=1$.

Решая совместно (18) в (16), перепишем (16) в виде:

$$\begin{cases} \sigma_x lm + \tau_{xy} m^2 - \sigma_z nl = mp_{nx}; \\ \sigma_y mn + \tau_{yz} n^2 - \sigma_x lm = np_{ny}; \\ \sigma_z nl + \tau_{zx} l^2 - \sigma_y mn = lp_{nz}. \end{cases} \quad (19)$$

Отсюда находим:

$$\tau_{xy} = \frac{mp_{nx} + \sigma_z nl - \sigma_x lm}{m^2}; \quad \tau_{yz} = \frac{np_{ny} + \sigma_x lm - \sigma_y mn}{n^2}; \quad \tau_{zx} = \frac{lp_{nz} + \sigma_y mn - \sigma_z nl}{l^2}. \quad (20)$$

После подстановки этих соотношений в (12) и несложных преобразований с учетом закона парности касательных напряжений ($\tau_{xy}=\tau_{yx}$, $\tau_{yz}=\tau_{zy}$, $\tau_{zx}=\tau_{xz}$) запишем:

$$\begin{cases} \sigma_x l^2 m^2 + mn(n^2 - lm)\sigma_y = -lmnp_{ny}; \\ \sigma_y m^2 n^2 + nl(l^2 - mn)\sigma_z = -lmnp_{nz}; \\ \sigma_z n^2 l^2 + lm(m^2 - nl)\sigma_x = -lmnp_{ny}. \end{cases} \quad (21)$$

Решаем данную систему по формулам Крамера:

$$\sigma_x = \Delta_x / \Delta_1; \; \sigma_y = \Delta_y / \Delta_1; \quad \sigma_z = \Delta_z / \Delta_1, \quad (22)$$

где

$$\Delta_x = -lmn \begin{vmatrix} p_{nz} & m^2 n^2 & nl(l^2 - mn) \\ p_{nx} & 0 & m^2 n^2 \\ p_{ny} & mn(n^2 - lm) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= l^2 m^2 n^2 [n^2 l(n^2 - lm) p_{nz} - lmn^3 p_{ny} - n(n^2 - lm)(l^2 - mnp_{nx})];$$

$$\Delta_y = -lmn \begin{vmatrix} 0 & p_{nz} & nl(l^2 - mn) \\ lm(m^2 - nl) & p_{nx} & m^2 n^2 \\ l^2 n^2 & p_{ny} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= l^2 m^2 n^2 [l^2 m(l^2 - mn) p_{nx} - mnl^3 p_{nz} - l(l^2 - mn)(m^2 - nlp_{nx})];$$

$$\Delta_z = -lmn\begin{vmatrix} 0 & m^2n^2 & p_{nz} \\ lm(m^2-nl) & 0 & p_{nx} \\ l^2n^2 & mn(n^2-lm) & p_{ny} \end{vmatrix} =$$

$$= l^2m^2n^2[m^2n(m^2-nl)p_{ny} - nlm^3p_{ny} - m(m^2-nl)(n^2-lmp_{nz})];$$

$$\Delta_1 = -lmn\begin{vmatrix} 0 & m^2n^2 & nl(l^2-mn) \\ lm(m^2-nl) & 0 & m^2n^2 \\ l^2n^2 & mn(n^2-lm) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= l^2m^2n^2[l^2m^2n^2 + (l^2-mn)(m^2-nl)(n^2-lm)].$$

В результате находим:

$$\sigma_x = \frac{n}{\Delta}[-(n^2-lm)(l^2-mn)p_{nx} - lmn^2p_{ny} + nl(n^2-lm)p_{nz}];$$

$$\sigma_y = \frac{l}{\Delta}[lm(l^2-mn)p_{nx} - (l^2-mn)(m^2-nl)p_{ny} - mnp_{nz}]; \quad (23)$$

$$\sigma_z = \frac{m}{\Delta}[-nlm^2p_{nx} + mn(m^2-nl)p_{ny} - (m^2-nl)(n^2-lm)p_{nz}],$$

где

$$\Delta = l^2m^2n^2 + (l^2-mn)(m^2-nl)(n^2-lm).$$

Подставляя найденные значения (23) в (20), получаем:

$$\tau_{xy} = \frac{m}{\Delta}[(n^2-lm)(l^2-mn)p_{nx} + lmn^2p_{ny} + nl(n^2-lm)p_{nz}];$$

$$\tau_{yz} = \frac{n}{\Delta}[-lm(l^2-mn)p_{nx} _ (l^2-mn)(m^2-nl)p_{ny} - mnl^2p_{nz}]; \quad (24)$$

$$\tau_{zx} = \frac{l}{\Delta}[nlm^2p_{nx} - mn(m^2-nl)p_{ny} + (m^2-nl)(n^2-lm)p_{nz}].$$

Здесь $\Delta = l^2m^2n^2 + (l^2-mn)(m^2-nl)(n^2-lm)$.

Делаем проверку. Подставляя (23) и (24) в (12) и осуществляя очевидные математические преобразования, убеждаемся в правильности полученных формул.

Приведем численный пример: l=2/3; m=2/3; n=1/3; p_{nx}=1; p_{ny}=2; p_{nz}=3. Непосредственно по формулам (23) и (24) находим: σ_x=–15 *МПа*; σ_y=–36 *МПа*; σ_z=27 *МПа*; τ_{xy}=30 *МПа*; τ_{yz}=18 *МПа*; τ_{zx}=–27 *МПа*. Таким образом, нам удалось восстановить тензор напряжений в данной точке только по действующим на заданной наклонной площадке усилиям:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 30 & -27 \\ 30 & -36 & 18 \\ -27 & 18 & 27 \end{pmatrix} \text{МПа}; \quad (25)$$

и окончательно убеждаемся в том, что формула (25) удовлетворяется в числах:

$$-(15)\frac{2}{3} + 30\frac{2}{3} + (-27)\frac{1}{3} = 1 \;\Rightarrow\; -10+20-9=1 \;\Rightarrow\; 1=1;$$

$$30\frac{2}{3} + (-36)\frac{2}{3} + 18\frac{1}{3} = 2 \;\Rightarrow\; 20-24+6=2 \;\Rightarrow\; 2=2;$$

$$-(27)\frac{2}{3} + 18\frac{2}{3} + 27\frac{1}{3} = 3 \;\Rightarrow\; -18+12+9=3 \;\Rightarrow\; 3=3.$$

Заключение

Решены две прямые, и что наиболее важно, две обратные задачи теории упругости. Алгоритм решения обратных задач приводится впервые и его авторы уверены в том, что он принесет несомненную пользу всем специалистам, работающим в данном направлении. Более подробный, чем ранее, анализ объемного напряженно-деформированного состояния в точке позволяет более глубоко изучить прочностные свойства несущих элементов конструкций, как в отдельных сечениях, так и в целом. Отметим также то обстоятельство, что решение первой обратной задачи уже внедрено в учебный процесс и прошло апробацию в течение двух последних лет на строительном факультете БНТУ. Решение второй обратной задачи как бы замыкает поставленную проблему и придает ей дополнительную стройность и законченность.

Библиография

1. Vardanyan, G.S., Soprotivleniye materialov s osnovami teorii uprugosti i plastichnosti, ASV, Moskva, 1995.