

NARZĘDZIA INFORMATYCZNE W NAUCZANIU PRZEDMIOTÓW PODSTAWOWYCH W UCZELNI TECHNICZNEJ

COMPUTER PROGRAMS TO LEARN BASIC SUBJECTS AT TECHNICAL UNIVERSITY

Roman Rumianowski
Edward Mulas
Izabela Józefczyk
Romuald Małecki
Katarzyna Matczak
Andrzej Pankowski
Politechnika Warszawska
Filia Płock
ul. Łukasiewicza 17
09-402 Płock
e-mail: rr13@pw.plock.pl

Abstract: The contemporary engineer must possess a skill of the selection of the relevant software for solving the technical problems. He can acquire such abilities on basic subjects, such as Physics and Mathematics. The paper presents review of the statistical software which a student of the technical study is acquainted on the basic objects in Płock Branch of Warsaw University of Technology. There are presented some interesting applications of the computer programs for different types of classes. Authors are convicted, that wide gamut of information instrument gives good base in program of education in future professional work graduate. They hope that the work will be inspiring for academic teachers of technical colleges.

Keywords: computer programs, technical study, the teaching of mathematics and physics.

Wprowadzenie

Jednym z kluczowych zagadnień w rozwoju nowoczesnego społeczeństwa informatycznego jest przygotowanie absolwentów kierunków nieinformatycznych do posługiwania się szeroką gamą oprogramowania, która wyposaży absolwenta w dostateczną wiedzę i umiejętności do opanowania kolejnych narzędzi związanych z jego przyszłą pracą zawodową.

W Filii Politechniki Warszawskiej w Płocku część tego zadania jest realizowana w ramach przedmiotów podstawowych, czyli matematyki i fizyki. Praca prezentuje aktualny dorobek w tej dziedzinie Zespołu Matematyki i Fizyki w Filii Politechniki Warszawskiej w Płocku.

Program ORIGIN w laboratorium fizycznym

Moduł kształcenia: Fizyka. Studia I stopnia.

Studenci kierunków technicznych mają na naszym wydziale zajęcia w laboratorium fizycznym na drugim semestrze. Na zajęciach dokonują pomiarów według podanej instrukcji, które następnie są opracowywane za pomocą programu ORIGIN. Student zapoznaje się na tych zajęciach z problematyką opracowania wyników eksperymentu [5]. Przygotowuje sprawozdanie z wykonania pomiarów, przeprowadza ich aproksymację, analizuje poziom ufności dopasowania za pomocą testu χ^2 oraz sporządza wykres. W ramach tych czynności student zapoznaje się z problematyką aproksymacji, a w szczególności musi w sposób samodzielny określić wartości początkowe dla procesu

dopasowania. Jednocześnie student zyskuje wiedzę na temat znaczenia niepewności pomiarowej poszczególnych wyników w ostatecznym dopasowaniu funkcji [3].

Pracę studenta przy sporządzaniu sprawozdania z ćwiczenia laboratoryjnego ilustruje poniższy przykład, w którym badana jest zależność lepkości dynamicznej cieczy od temperatury bezwzględnej.

Przykład: *Badanie zależności lepkości cieczy od temperatury.*

Zmianę lepkości cieczy w funkcji temperatury określa równanie Arrheniusa-Guzmana:

$$\eta(T) = ae^{\frac{b}{T}}, \quad (1)$$

gdzie:

a, b – charakterystyczne stałe dla cieczy;

η – współczynnik lepkości dynamicznej;

T – temperaturą bezwzględną.

W ramach ćwiczenia laboratoryjnego student dokonuje pomiarów lepkości nieznanej sobie cieczy dla różnych temperatur. Tabela 1 przedstawia rzeczywiste wyniki uzyskane przez studenta i zawiera wartości lepkości dla różnych temperatur oraz niepewności pomiarowe obliczone przez studenta [2].

Tabela 1. Wyniki pomiarów lepkości uzyskane przez studenta.

Temperatura [K]	Lepkość dynamiczna $\left[\frac{kg}{m \cdot s} \right]$	Niepewność lepkości dynamicznej $\left[\frac{kg}{m \cdot s} \right]$
295	36,9	2,8
298	31,5	2,3
303	25,7	2,8
308	21,0	2,4
313	17,9	2,2
318	15,2	2,2
323	12,9	1,2

Rys.1 przedstawia wyniki z Tabeli 1 oraz dopasowaną krzywą (1). Wartość statystyki χ^2 otrzymana w programie ORIGIN pozwala studentowi ocenić jakość dopasowania. Przeprowadzenie procesu aproksymacji wymagało od studenta znalezienia wartości początkowych parametrów dopasowania a i b .

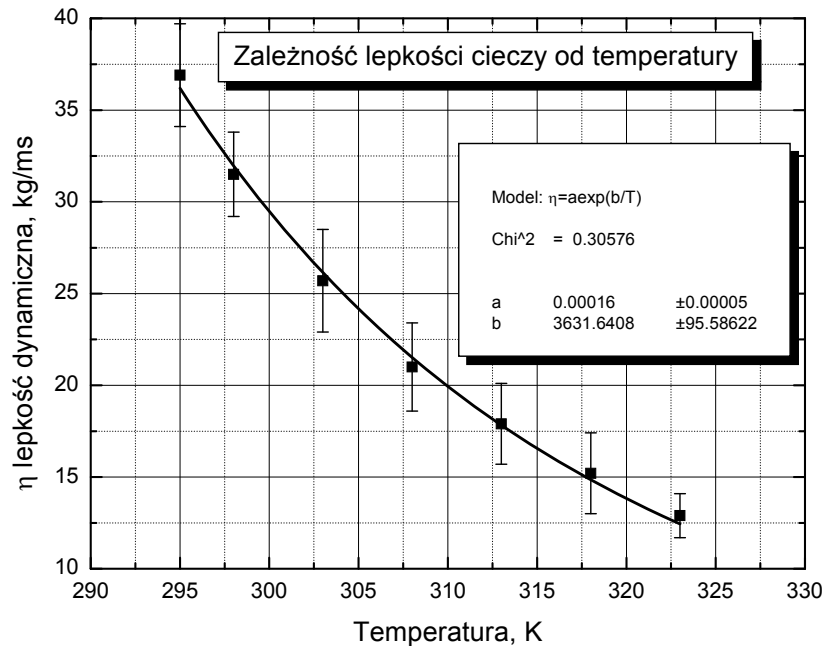
Program EXCEL. Wstęp do Statystyki

Moduł kształcenia: Matematyka. Studia I stopnia.

Statystyka jest jedną z dziedzin, która nie bez powodu, kojarzy się z ogromną ilością obliczeń. Obecnie w czasach powszechnego używania komputerów i kalkulatorów, trudno sobie wyobrazić wykonywanie obliczeń statystycznych bez ich użycia. Jednak oprogramowanie komputerowe nie spełnia wszystkich oczekiwań w odniesieniu do zastosowań w dydaktyce tego przedmiotu. W obliczeniach i symulacjach statystycznych potrzebna jest nie tylko pewna wiedza teoretyczna, ale także

umiejętność wykonywania obliczeń w wybranym programie.

Najbardziej popularnym arkuszem kalkulacyjnym jest EXCEL wchodzący w skład pakietu Microsoft Office, jako program ułatwiający gromadzenie i przechowywanie oraz obróbkę danych. Jest on zainstalowany na większości komputerów osobistych. Arkusz ten zawiera wiele funkcji z zakresu statystyki, finansów i inżynierii. Wprowadzenie danych nie wymaga rygorystycznej standaryzacji, ponadto student posiada szereg umiejętności korzystania z arkusza EXCEL, które nabył już w szkole. Potrafi obliczyć niektóre charakterystyki liczbowe funkcji: (*Średnia, Wyst. Najczęściej, Mediana, Kwantyl, Wariancja Popul., Odch. Standard. Populacji, Odch.Średnie, Kurtoza, Skośność*) Dzięki dużej liczbie przykładów, które można wykonać ze studentem, wprowadzone charakterystyki liczbowe dla rozkładów nabierają właściwego znaczenia [1]. Student potrafi je również zinterpretować.



Rys. 1. Ilustracja wyników z Tabeli 1 wraz z dopasowaną funkcją według wzoru (1).

Już trzysta lat temu, zaczęto dostrzegać, że rozkład normalny zajmuje specjalne, ważne miejsce w teorii statystyki i rachunku prawdopodobieństwa. Dlatego EXCEL oferuje więcej funkcji arkusza dla rozkładu normalnego niż rozkładu t-Studenta, rozkładu χ^2 i innych.

Przykład: Wygenerować próbę losową o rozkładzie t-Studenta o 4 stopniach swobody. Zweryfikować zgodność z rozkładem normalnym dowolnym testem np. testem Kolmogorowa na poziomie istotności 5%.

Z dowolnie licznej próbki losowej X_1, X_2, X_3, X_4 student generuje rozkłady normalne Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 z parametrami 0,1. Wszystkie dalej przedstawione wartości liczbowe i rysunki są fragmentami z pracy domowej studenta w arkuszu EXCEL (generowana próba była liczebności 500) (Tabela 2).

Następnie wykorzystując zależności rozkładów t-Studenta i χ^2 od rozkładów normalnych Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 generuje wymienione rozkłady (Tabela 3, rys. 2).

Tabela 2. Dane z samodzielnej pracy studenta.

X_1	$r = \sqrt{-2 \ln x_1}$	$\text{Phi} = 2\pi r$	$Y_1 - N(0,1)$
0,000932	3,735682	3,412303	-3,59963
0,828243	0,61392	1,76725	-0,11983
0,655473	0,919128	5,295174	0,505844
0,121957	2,051385	4,926534	0,435943

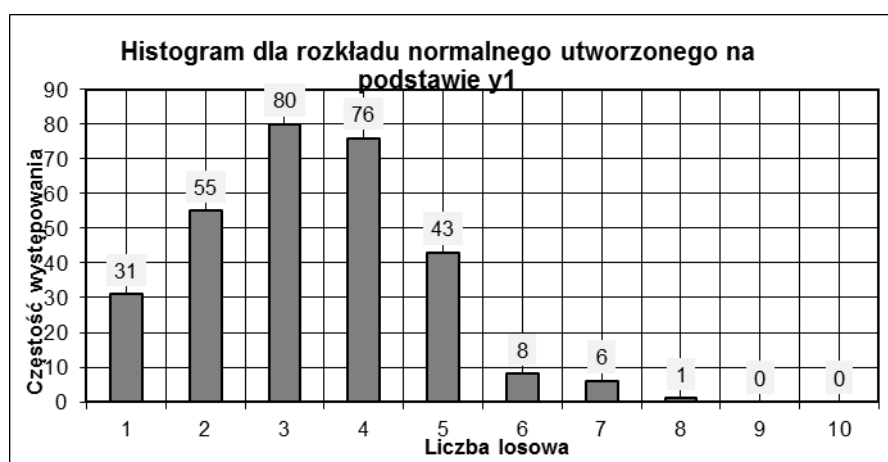
Tabela 3. Rozkłady wygenerowane przez studenta.

χ^2		Statystyka χ^2	U	Statystyka t	t	
		2,295236	1,515004	1,35064		
średnia	4,141807	2,953222	1,718494	0,266929	średnia	0,026527
wariancja	9,354982	3,917884	1,979364	-0,01516	wariancja	0,941271
odchylenie	3,058591	7,609919	2,758608	0,643466	odchylenie	0,970191

Dzięki temu ćwiczeniu sprawdzamy wiedzę w zakresie znajomości zależności między wymienionymi rozkładami i rozkładem normalnym.

Jedną z najważniejszych umiejętności, którą powinien zdobyć student w trakcie kształcenia jest sprawność graficznego przedstawienia danych oraz prawidłowe odczytywanie informacji na podstawie wykresu. Korzystając z programu EXCEL możemy wykonać wiele ćwiczeń, które kształtują tę

umiejętność. Nie jest możliwe wykonanie dużej liczby przykładów bez posługiwania się odpowiednim oprogramowaniem. Program EXCEL umożliwia tworzenie wykresów statystycznych: wykresy liniowe, wykresy powierzchniowe, wykresy bryłowe (trójwymiarowe), wykresy mapowe, wykresy obrazkowe, wykresy korelacyjne czy wykresy dynamiczne.



Rys. 2. Przykład wykresu rozkładu normalnego wygenerowanego przez studenta.

W arkuszu EXCEL możemy wykonać badanie zgodności wygenerowanego rozkładu losowego z rozkładem normalnym: Test Hellwiga dla małej próby oraz Test Kołmogorowa dla dużej próby, badanie istotności parametrów strukturalnych modelu, ...

Podstawowym elementem, który decyduje o konieczności użycia oprogramowania komputerowego jest ogromna ilość obliczeń, które wykonujemy przy dużych bazach danych statystycznych. Drugim elementem jest możliwość wykonania bardzo wielu ćwiczeń, które prezentują dane treści. Dzięki temu student jest w stanie zaobserwować różnice oraz pewne podstawowe

cechy i własności wprowadzanych treści kształcenia.

Program STATISTICA

Moduł kształcenia: Zastosowanie matematyki w inżynierii środowiska. Studia I stopnia.

Studenci drugiego roku Inżynierii Środowiska w ramach przedmiotu „Zastosowanie matematyki w inżynierii środowiska” mają zajęcia z wykorzystaniem programu STATISTICA. Zajęcia te są prowadzone na zakończenie semestru. Przez pierwsze miesiące studenci poznają teoretyczne podstawy rachunku prawdopodobieństwa i

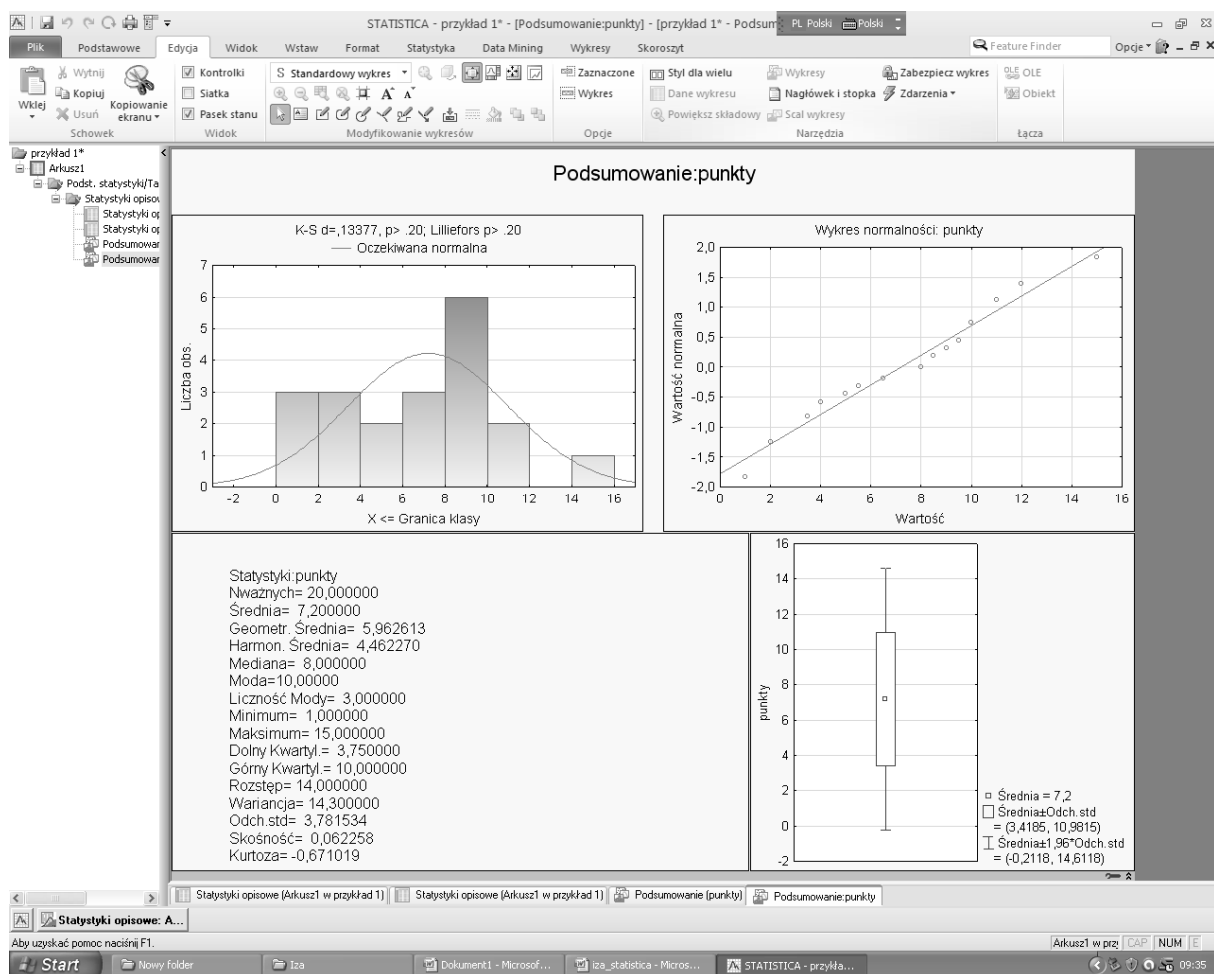
statystyki. Rozwiązują zadania, w których znajdują dla rozkładów dyskretnych prawdopodobieństwo, dystrybuantę, wartość oczekiwaną, wariancję, medianę i modę. Dla rozkładów ciągłych, dodatkowo szukają funkcji gęstości, przedziałów ufności i weryfikowania hipotez z zastosowaniem podstawowych testów. Po kolokwiach sprawdzających wiedzę pokazujemy studentom, że statystyki, które często liczyli z mozołem, można znaleźć wykorzystując program STATISTICA.

Przykład: Na zajęciach przy komputerach wracamy do kilku zadań rozwiązanych wcześniej przy tablicy i rozwiązujemy je wykorzystując program

STATISTICA. Realizowane są zadania szukające podstawowych charakterystyk statystycznych a także zadania z wykorzystaniem prostych testów do weryfikacji hipotez. W tej drugiej części student musi wykazać się wiedzą, aby odpowiednio dobrać test.

Zaczynamy od zadania, w którym student otrzymuje 20 elementową próbę i ma dla niej znaleźć podstawowe charakterystyki i narysować histogram (zadanie wcześniej rozwiązane przy tablicy).

Małym nakładem pracy otrzymuje wyniki przedstawione na rys. 3.



Rys.3. Przykładowy arkusz w programie STATISTICA otrzymany przez studenta.

Program MATHCAD

Moduł kształcenia: Fizyka. Studia II stopnia.

Jedną z ważnych umiejętności, jakie nabywają studenci studiów II stopnia jest formułowanie i rozwiązywanie zagadnień inżynierskich w języku

analizy numerycznej. Osiągnięcie tego celu uzyskujemy poprzez realizację symulacji komputerowych oraz porównanie rezultatów tych symulacji z rozwiązaniem analitycznym. Przykładem zastosowania eksperymentu komputerowego, który realizujemy ze studentami za pomocą programu

MATHCAD, jest zagadnienie drgań wymuszonych układu mechanicznego.

Przykład: Zagadnienie drgań.

Rozważ dla zadanych warunków początkowych małe drgania masy m zawieszona na sprężynie Hooke'a o współczynniku sprężystości k . Załóż działanie siły ciężkości, siły oporu proporcjonalnej do prędkości ciała: $F = -\gamma v$ i siły wymuszającej okresowej, postaci $F = F_0 \cos(\omega_2 t)$. Znaleźć:

- równania kinematyczne $x(t), v(t)$;
- logarytmiczny dekrement tłumienia;
- krzywe rezonansowe zależności amplitudy drgań od częstości siły wymuszającej.

Rozważ przypadki gdy ω_2 jest: 1. znacząco mniejsze, 2. znacząco większe, 3. bliskie częstości drgań własnych.

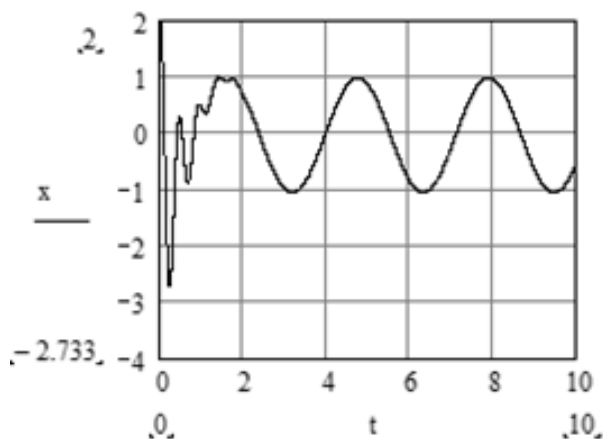
Narysuj odpowiednie wykresy (rys. 4) tych zależności. Porównaj wyniki z rozwiązaniem analitycznym [4].

Symulacja

$$m \cdot x'' + \gamma \cdot x' + mg = F_0 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t)$$

$$\beta := \frac{\gamma}{2 \cdot m} \quad \omega_2 := 2 \quad a := \frac{F_0}{m}$$

$$x'' + 2 \cdot \beta \cdot x' + (\omega_0)^2 \cdot x + g = a \cdot \cos(\omega_2 \cdot t)$$



Rys. 4. Zależność wychylenia od czasu.

Przypadek 1.

$$\beta < \omega_0 \quad x := \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

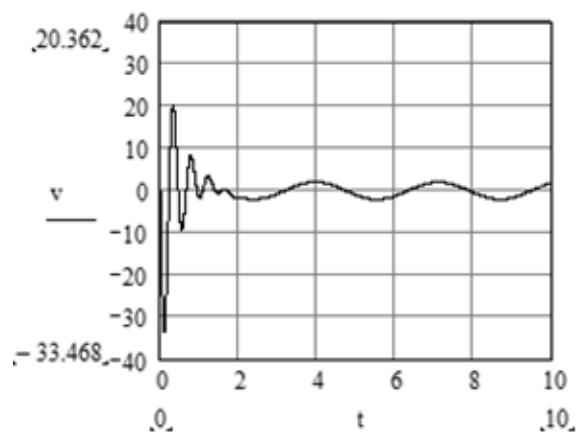
$$D(t, x) := \begin{bmatrix} x_1 \\ (-2 \cdot \beta \cdot x_1) - (\omega_0)^2 \cdot x_0 - g - a \cos(\omega_2 \cdot t) \end{bmatrix}$$

$$\omega_0 = 14,142$$

$$\beta = 2,5 \quad X := \text{rkfixed}(x, 0, 5 \cdot \Delta t, NSTEP, D)$$

$$t := X^{(0)} \quad x := X^{(1)} \quad v := X^{(2)}$$

Rezultatem modelowania są zależności $x(t), v(t)$ w postaci wykresu na rys. 5 i w tabeli 4.



Rys. 5. Zależność prędkości od czasu.

Tabela 4. Rezultaty modelowania zależności $x(t), v(t)$.

	0	1	2
0	0	2	0
1	$1 \cdot 10^{-3}$	1.9997	-0.6083
2	$2 \cdot 10^{-3}$	1.9988	-1.2134
3	$3 \cdot 10^{-3}$	1.9973	-1.8152
4	$4 \cdot 10^{-3}$	1.9952	-2.4137
5	$5 \cdot 10^{-3}$	1.9924	-3.0087
6	$6 \cdot 10^{-3}$	1.9891	-3.6002
7	$7 \cdot 10^{-3}$	1.9852	-4.1879

Student analizuje otrzymane numerycznie wyniki i porównuje je z rozwiązaniem analitycznym [4].

Program MATLAB z modulem Neural Network Toolbox

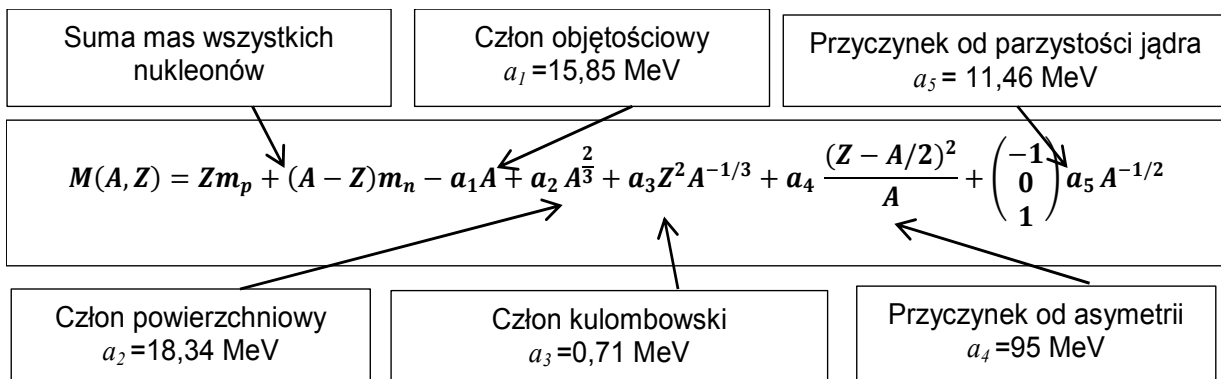
Moduł kształcenia: Komputerowe wspomaganie badań naukowych. Studia III stopnia.

Zadaniem tego przedmiotu jest przygotowanie doktoranta do przyszłej pracy naukowej. Doktorant poznaje narzędzia informatyczne stanowiące jego naukowy warsztat. Jednym z takich narzędzi są sztuczne sieci neuronowe (SSN). Dalej zaprezentowano jeden z problemów fizyki jądrowej rozwiązywanych przez doktoranta na egzaminie z tego przedmiotu.

Przykład: Półempiryczny wzór Bethe – Weizsackera (B-W).

Wzór (B-W) pozwala obliczyć masę jądra atomu o zadanej liczbie masowej A i atomowej Z (rys.5).

Cel: aproksymacja półempirycznego wzoru Bethe – Weizsackera za pomocą SSN.



Rys. 5. Algorytm stosowania wzoru (B-W).

Dane do B-W

Dane wejściowe:

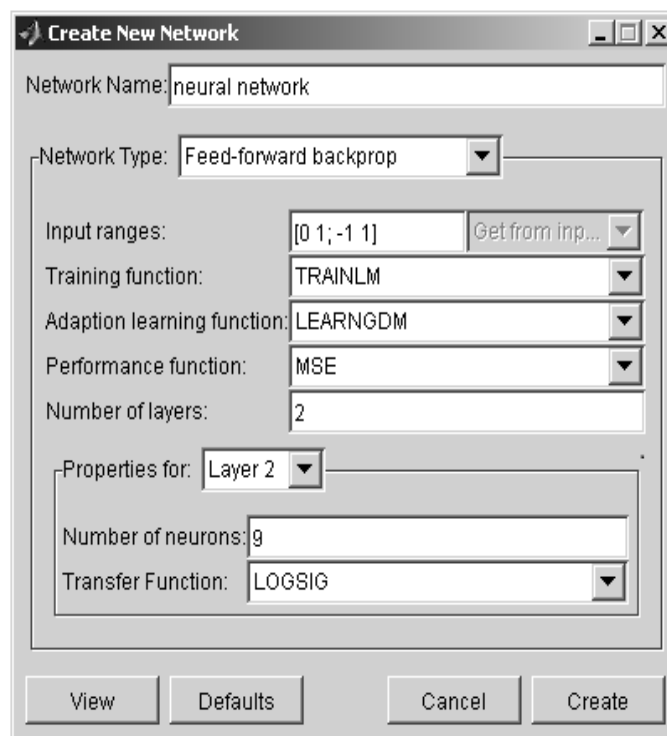
Wektory uczące – 200 trójek liczb $(Z, A, \ln A)$.

Wektory testowe (nietrenowane) – 87 trójek liczb $(Z, A, \ln A)$ wybrane losowo ze zbioru 287 jąder występujących w przyrodzie (jest ok. 2000 otrzymanych sztucznie w laboratoriach).

Dane wyjściowe:

Wektory jednoelementowe zawierające masy $M(Z, A)$ 287 jąder atomowych.

Do modelowania sztucznej sieci neuronowej użyto interfejsu graficznego GUI Neural Network Toolbox programu MATLAB. Interfejs daje szerokie możliwości graficzne i w szczególności pozwala na analizę procesu uczenia poprzez wizualizację zachowania błędu średniego kwadratowego MSE w funkcji liczby epok. Ponadto umożliwia analizę statystyczną otrzymanych wartości wyjściowych oraz ich porównanie z wartościami rzeczywistymi.



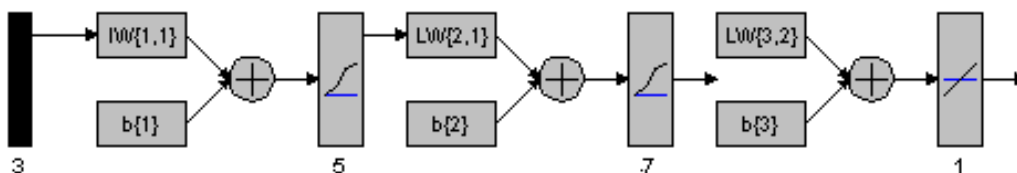
Rys. 6. Interfejs graficzny do definiowania sztucznej sieci neuronowej.

Użyte przez studenta sieci neuronowe miały definiowane (rys. 7):

- rodzaj sieci (feed-forward backprop),
- funkcje transferu (logsig, tansig, purelin),
- funkcje uczące,
- liczby warstw ukrytych (zwykle 2, 3).

Architektura sztucznej sieci neuronowej

Po wielu próbach wybrano spośród SSN sieć zawierającą oprócz warstwy wejściowej i wyjściowej dwie warstwy ukryte zawierające odpowiednio 5 i 7 neuronów: 3 – 5 – 7 – 1. Liczba wag początkowych - w oraz elementów progowych - b , (ang. *bias*) wynosi:

$$(3 \times 5 + 5 \times 7 + 7 \times 1)_w + 5 + 7 + 1 = 70.$$


Rys. 7. Architektura sztucznej sieci neuronowej.

Inne SSN. Aproksymacja w MATLAB.

Zadanie realizowano także za pomocą sieci z 3 warstwami ukrytymi:

$$^a(3 + 3 + 3 + 3 + 1)_a \quad [40]$$

$$^a(3 + 5 + 5 + 5 + 1)_a \quad [81]$$

- z 2 warstwami ukrytymi:

$$^a(3 + 5 + 7 + 3 + 1)_a \quad [70]$$

$$^a(3 + 9 + 9 + 3 + 1)_a \quad [136]$$

W procesie treningu okazało się, że istnieje kilka sieci z dwiema warstwami ukrytymi, które dały zbliżoną wartość MSE, ale liczba neuronów była w nich większa, co wydłużało czas obliczeń. Za pomocą SSN studenci symulowali istnienie nieznanymi jąder atomów i prognozowali wartość ich mas $M(A, Z)$.

MATHCAD w rozwiązywaniu równań różniczkowych

Moduł kształcenia: Metody numeryczne dla równań różniczkowych. Studia III stopnia.

W semestrze pierwszym studenci studiów stopnia III w ramach matematyki stosowanej zapoznają się z teorią równań różniczkowych cząstkowych i

modelami fizycznymi opartymi na tej teorii. Semestr czwarty dotyczy bardziej praktycznego aspektu równań różniczkowych – metod numerycznych. W części wykładowej studenci poznają zagadnienia związane z teorią metod numerycznych dla równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych: zagadnienia aproksymacji, stabilności i zbieżności schematów różnicowych. Szczególną uwagę koncentruje się na metodach Rungego–Kutty dla równań zwyczajnych i metodzie siatek dla równań cząstkowych. Metody te są stosowane w funkcjach standardowych programu MATHCAD, który wykorzystuje się do rozwiązywania zagadnień granicznych dla równań zwyczajnych i cząstkowych w ramach laboratorium. Przykładem takiego zagadnienia może być układ równań opisujący rzut poziomy.

Przykład 1: Model rzutu poziomego.

Rozważmy rzeczywisty rzut poziomy uwzględniający opory powietrza oraz wpływ prądów poziomych v_1 i pionowych v_2 o stałych wartościach. Siła oporu jest wypadkową sił stycznych (opory lepkości) oraz sił normalnych (opory ciśnieniowe). Oznaczając pole prędkości $\vec{v}(t) = [v_x(t), v_y(t)]$ możemy napisać następujący układ równań:

$$\begin{aligned} ma_x(t) &= -b\sqrt{(v_x(t)-v_1)^2 + (v_y(t)-v_2)^2} (v_x(t)-v_1) \\ ma_y(t) &= -mg + k\sqrt{(v_x(t)-v_1)^2 + (v_y(t)-v_2)^2} |v_y(t)-v_2| \end{aligned} \quad \begin{cases} v_x(0) = v_0 \\ x(0) = 0 \\ v_y(0) = 0 \\ y(0) = H \end{cases}$$

Założmy, że dana jest prędkość początkowa v_0 i wysokość H . Powyższy model może być stosowany do opisu lotu kapsuły wodnej służącej do gaszenia pożaru. Studenci mogą prześledzić wykres lotu kapsuły w zależności od danych początkowych i wielkości fizycznych opisujących kapsułę. Oto przykładowe rozwiązanie problemu w programie MATHCAD.

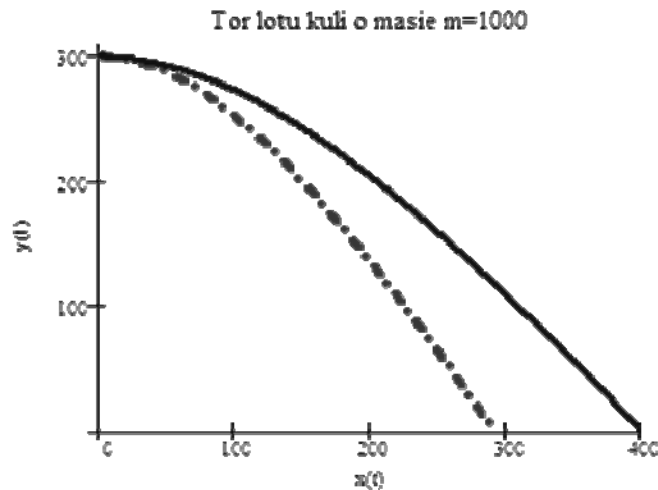
Rozwiązanie układu równań w programie MATHCAD.

Przyjmujemy następujące dane - prędkości początkowe: $v_0=30$ m/s, $v_0=40$ m/s, wysokość $H=300$ m, prądy poziome $v_1=10$ m/s i $v_2=5$ m/s, masa kapsuły $m=1000$ kg, współczynniki oporu aerodynamicznego w płaszczyźnie poziomej $b=0,01$ i pionowej $k=3$. Powyższy układ sprowadzamy do układu następujących czterech równań rzędu pierwszego, gdzie oznaczyliśmy $Y_0=x(t)$, $Y_1=v_x(t)$, $Y_2=y(t)$, $Y_3=v_y(t)$:

$$D(x,y) := \begin{bmatrix} \frac{Y_1}{m} \\ -\frac{b}{m} \sqrt{(Y_1 - v_1)^2 + (Y_3 - v_2)^2} (Y_1 - v_1) \\ \frac{Y_3}{m} \\ -g + \frac{k}{m} \sqrt{(Y_1 - v_1)^2 + (Y_3 - v_2)^2} |Y_3 - v_2| \end{bmatrix} \quad p := \begin{pmatrix} 0 \\ v_{01} \\ H \\ 0 \end{pmatrix} \quad z := \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \\ H \\ 0 \end{pmatrix}$$

Stosujemy funkcje standardowe realizujące metodę Rungego – Kuty:

A:=rkfixed(z, 0, 11, 80000, D)
B:=rkfixed(p, 0, 11, 80000, D).



Rys. 8. Wyniki obliczeń w programie MATHCAD dla różnych prędkości początkowych.

Przykład 2: Przewodnictwo ciepła.

Innym przykładem jest zagadnienie przewodnictwa ciepła w pręcie o długości L . Temperatura opisana jest równaniem $u_t(x,t)=a^2u_{xx}(x,t)+4tx$ z warunkami brzegowymi $u_x(0,t)=2\sin t$ oraz $u(L,t)=2\cos t$. Niech

warunek początkowy dany będzie równością $u(x,0) = 5\left(L - \frac{x^2}{2}\right)$. Oczywiście student zmieniając warunki graniczne równania otrzymuje różne

rozwiązania – temperatury (rys. 9). Poniżej zamieszczamy arkusz w programie MATHCAD rozwiązujący opisane zadanie [6]:

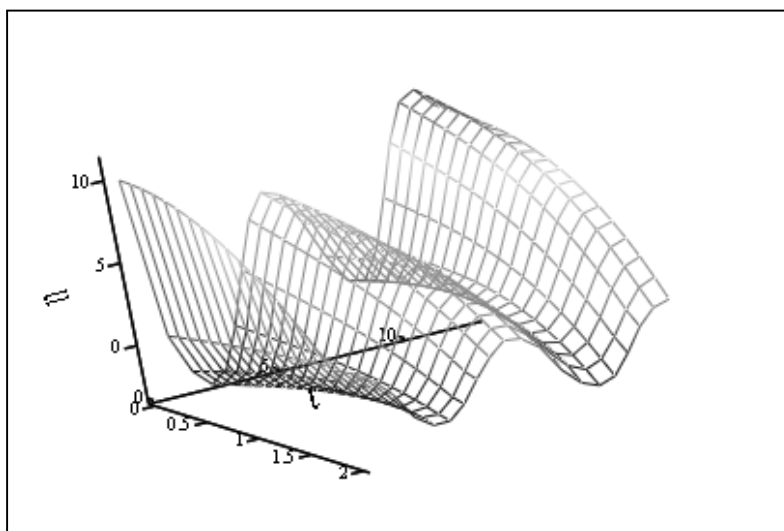
Given

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + 4tx \quad L \equiv 2 \quad a \equiv 2$$

$$u := Pdesolve \left[u, v, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ 4\pi \end{pmatrix} \right] \quad u_x(0,t) = 2\sin t$$

$$M := CreateMesh(u, 0, L, 0, 4\pi)$$

$$u(x,0) = 5 \left(L - \frac{x^2}{2} \right)$$



Rys. 9. Wykres temperatury $u(x,t)$ przy zadanych warunkach granicznych.

Przykład 3. Amplituda drgań struny.

Również w prosty sposób możemy rozwiązać równanie falowe opisującego przy zadanych warunkach początkowych amplitudę drgań struny o długości L . Rozważmy zagadnienie brzegowo-początkowe dla funkcji $v(x,t)$ na zbiorze $D=[0,L] \times [0,T]$:

$$\begin{cases} v_{tt}(x,t) = a^2 v_{xx}(x,t) & \text{dla } (x,t) \in D \\ v(x,0) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), & v_t(x,0) = 0 \\ v(0,t) = 0, & v(L,t) = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie otrzymujemy zamieniając powyższe równanie rzędu drugiego na układ równań rzędu pierwszego względem zmiennej czasowej t i stosując funkcję standardową *Pdesolve*. Poniżej zamieszczamy rozwiązanie zagadnienia w

programie MATHCAD oraz wykres rozwiązania (rys. 10):

Given

$$v_t(x,t) = a^2 v_{xx}(x,t)$$

$$u_t(x,t) = v(x,t)$$

$$L \equiv 2 \quad a \equiv 2$$

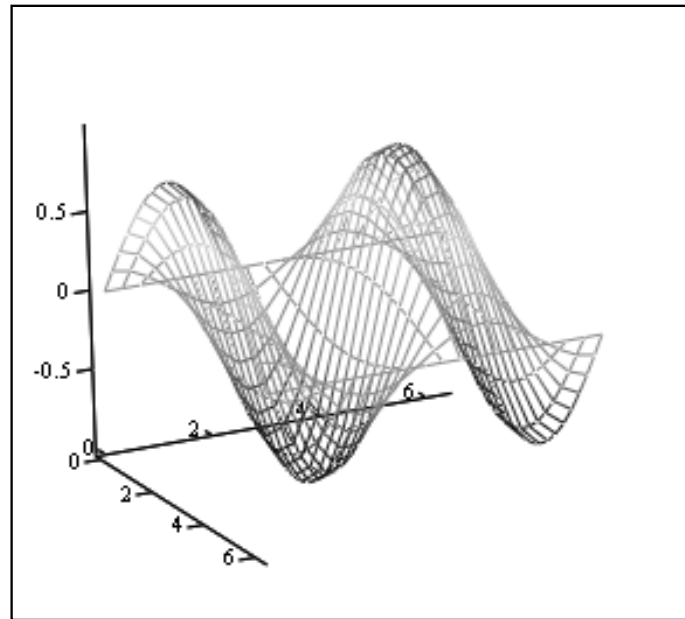
$$u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$v(x,0) = 0$$

$$u(L,t) = 0$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := Pdesolve \left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \end{pmatrix} \right]$$

$$M := CreateMesh(u, 0, L, 0, 2\pi)$$



Rys.10. Wykres rozwiązania równania falowego przy zadanych warunkach granicznych.

MAXIMA i WOLFRAMALPHA – przykłady kalkulatorów symbolicznych i numerycznych

Zagadnienia prowadzące do rozwiązywania układów równań liniowych oraz nieliniowych to zagadnienia często spotykane nie tylko w problemach technicznych. W przykładzie przedstawione zostanie rozwiązywanie układów n -równań liniowych z n -niewiadomymi z zastosowaniem darmowych narzędzi informatycznych MAXIMA oraz WOLFRAMALPHA.

Dla układów równań z dwiema lub nawet trzema niewiadomymi, znane studentom metody, takie jak: eliminacja Gaussa czy ostatecznie wzory Cramera dają możliwość uzyskania szukanych rozwiązań. Wprowadzając zaś zapis macierzowy układów równań, proces rozwiązania możemy sprowadzić do przetwarzania macierzy. Do tego celu można zastosować liczne narzędzia informatyczne przetwarzania numerycznego. Wiele z tych narzędzi dysponuje wbudowanymi metodami dedykowanymi rozwiązywaniu wielu zagadnień matematycznych i nie tylko.

Dalej przedstawiono przykładowe rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} x + 2y + z + 3t = 4 \\ x + y - 2z - 2t = -1 \\ 2x - y - z + 2t = 4 \\ 3x + 2y - z + t = 4 \end{cases}$$

oraz okno programu Maxima z wczytanym układem (rys. 11).

Celem procesu edukacyjnego realizowanego na uczelni jest dostarczenie przyszłemu inżynierowi „narzędzi” w postaci metod, sposobów do rozwiązywania potencjalnych problemów technicznych, ekonomicznych, innych.

Zadaniem studenta może być nie tylko rozwiązanie układu, ale przede wszystkim wybór odpowiedniego narzędzia informatycznego do danego problemu. Prezentowane zastosowanie programu MAXIMA znacznie upraszcza proces wyznaczania poszukiwanych rozwiązań oraz daje czytelną postać odpowiedzi:

$$[[x = 1, y = 0, z = 0, t = 1]]$$

Zastosowanie silnika WOLFRAMALPHA daje rozwiązanie prezentowanego układu równie szybko i czytelnie.

Input:

$$\{x + 2y + z + 3t = 4, \quad x + y - 2z - 2t = -1, \quad 2x - y - z + 2t = 4, \quad 3x + 2y - z + t = 4\}$$

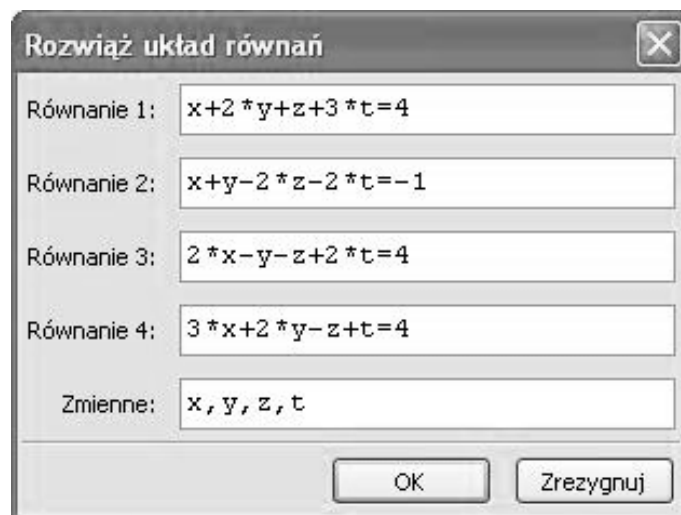
Solution:

$$t = 1, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad z = 0$$

Analiza funkcji wielu zmiennych rzeczywistych, w szczególności wyznaczanie ekstremów lokalnych, wymaga od studentów znajomości wielu elementarnych zagadnień analizy matematycznej oraz algebry. Począwszy od różniczkowania funkcji jednej oraz wielu zmiennych, rozwiązywania układów równań (często nieliniowych), a kończąc na obliczaniu wyznaczników. Trudno wyobrazić sobie

realizację procesu dydaktycznego z zakresu funkcji wielu zmiennych wśród studentów, którzy nie posiadli niezbędnej wiedzy oraz umiejętności. Nie

osiągnęli zakładanych efektów kształcenia dotyczących funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.



Rys. 11. Okno programu Maxima z wczytanym układem.

Poniżej przedstawiono schemat wyznaczania ekstremów lokalnych przykładowej funkcji dwóch zmiennych opisanej wzorem:

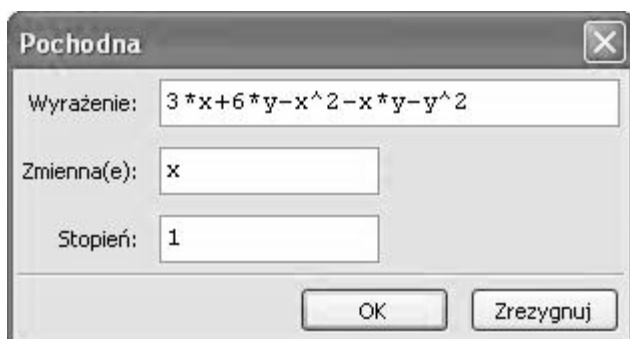
$f(x, y) = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$ z zastosowaniem środowiska MAXIMA.

Kolejne etapy rozwiązania stawianego problemu:

- Wczytanie definicji funkcji

```
[ --> 3*x+6*y-x^2-x*y-y^2
```

- Obliczanie pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego (rys. 12)



Rys. 12. Ekran obliczania pochodnych.

- Wyniki operacji różniczkowania

```
[ --> 3*x+6*y-x^2-x*y-y^2
```

```
[ (%i1) diff(3*x+6*y-x^2-x*y-y^2, x, 1);
  (%o1) -y-2 x+3
```

```
[ (%i2) diff(3*x+6*y-x^2-x*y-y^2, y, 1);
  (%o2) -2 y-x+6
```

- Warunek konieczny istnienia ekstremów

- Rozwiązanie układu równań

Funkcja posiada jeden punkt stacjonarny o współrzędnych (0,3)

```
[ (%i3) solve([%o1=0,%o2=0], [x,y]);
  (%o3) [[x=0, y=3]]
```

Kolejne kroki polegające na obliczaniu pochodnych cząstkowych rzędu drugiego oraz analizie znaku wyznacznika dają szukaną odpowiedź (rys. 13).

Ten sam efekt, o wiele szybciej, można uzyskać stosując wspomniany już silnik WOLFRAMALPHA.

- Wczytanie zapytania – poszukiwanie maksimum

Input interpretation:

```
maximize 3 x + 6 y - x^2 - x y - y^2
```

- Uzyskana odpowiedź

Global maximum:

$$\max\{3x + 6y - x^2 - xy - y^2\} = 9 \text{ at } (x, y) = (0, 3)$$

- Wczytanie zapytania – poszukiwanie minimum

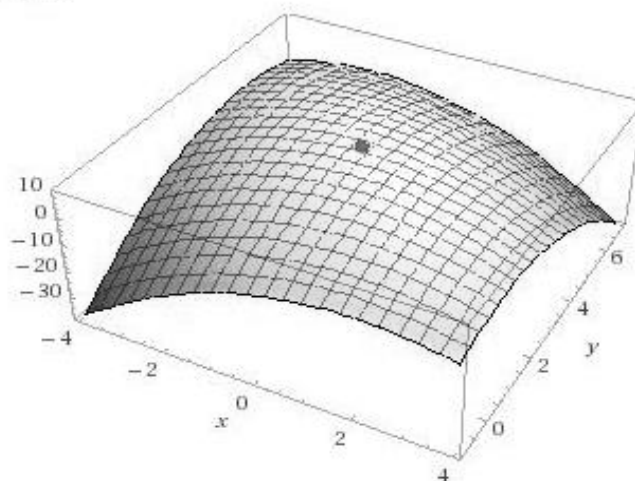
Input interpretation:

minimize $3x + 6y - x^2 - xy - y^2$

Global minima:

(no global minima found)

3D plot:



Rys. 13. Wykres analizowanej funkcji oraz interpretacja graficzna poszukiwanego ekstremum.

Dobór poruszanych zagadnień matematycznych nie jest przypadkowy jak również wybór prezentowanych narzędzi informatycznych, darmowych oraz ogólnie dostępnych, jest zamierzony i celowy, ma na celu wywołanie dyskusji.

Realizując proces edukacyjny należy przemilczeć istnienie prezentowanych kalkulatorów? Należy zakazywać stosowania tych narzędzi? Czy w procesie edukacyjnym komputer powinien być stosowany? W jakim zakresie dla studiów pierwszego, drugiego i trzeciego stopnia narzędzia informatyczne winny być wykorzystywane? Czy należy utrzymywać fikcyjną realizację zamierzonych efektów kształcenia bez komputerów, czy

raczej konsekwentnie włączać w proces kształcenia narzędzia informatyczne?

Podsumowanie

Praca prezentuje przegląd oprogramowania, z którym student studiów technicznych zapoznaje się na przedmiotach podstawowych w Filii Politechniki Warszawskiej w Płocku. Autorzy są przekonani, że szeroka gama narzędzi informatycznych w programie kształcenia daje dobrą podstawę absolwentowi w przyszłej pracy zawodowej.

Bibliografia

1. Carlberg, C., Analiza statystyczna Microsoft Excel 2010PL, Wydawnictwo HELION, Gliwice 2012.
3. Mulas, E., Rumianowski, R., Rachunek niepewności pomiaru w pracowni fizycznej, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2002.
4. Mulas, E., Przykłady symulacji komputerowej w fizyce, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2006.
5. Nowak, R., Statystyka dla fizyków, PWN, Warszawa 2002.
6. Paleczek, W., Mathcad w algorytmach, EXIT, Warszawa 2005.